Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Distribuições invariantes

Def. Dadas uma medida λ e uma Q-matriz $\mathbf{Q}$ em $\mathcal{S}$, dizemos que λ é invariante para $\mathbf{Q}$ se $\lambda\mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

Teorema 1

Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz e $\mathbf{\Pi}$ a matriz de saltos resp. São equivalentes:

(i) λ é invariante para $\mathbf{Q}$;

(ii) $\mu\mathbf{\Pi} = \mu$, onde $\mu_x \equiv \lambda_x q_x$ (μ é invariante para $\mathbf{\Pi}$).

Dem. Note que $q_x(\pi_{xy} - \delta_{xy}) = q_{xy}$ $\forall$ $x, y \in \mathcal{S}$. Logo, $\forall$ $y \in \mathcal{S}$

$$\big(\mu(\mathbf{\Pi} - \mathbf{I})\big)_y = \sum_{x\in\mathcal{S}} \mu_x(\pi_{xy} - \delta_{xy}) = \sum_{x\in\mathcal{S}} \lambda_x q_{xy} = (\lambda\mathbf{Q})_y,$$

e concluímos que $\mu\mathbf{\Pi} - \mu = \lambda\mathbf{Q}$. $\square$

Distribuições invariantes (cont)

Vamos usar os resultados de tempo discreto para o caso de tempo contínuo.

Teorema 2

Suponha que $\mathbf{Q}$ seja uma Q-matriz irredutível e recorrente. Então $\mathbf{Q}$ tem uma medida invariante, que é única a menos de múltiplos escalares.

Dem. Excluindo o caso trivial em que $\mathcal{S}$ é unitário, a irredutibilidade obriga a que $q_x > 0 \ \forall \ x \in \mathcal{S}$. Pelos resultados do Álbum 19, $\mathbf{\Pi}$ é irredutível e recorrente. Pelos resultados em tempo discreto, $\mathbf{\Pi}$ tem uma única medida invariante a menos de múltiplos escalares, digamos μ. Pelo Teo 1, podemos tomar $\lambda_x = \mu_x / q_x$, $x \in \mathcal{S}$. $\square$

Recorrência positiva

Lembremos que x é dito recorrente se $q_x = 0$ *ou* $\mathbb{P}_x(\mathcal{T}_x < \infty) = 1$.

Se $q_x = 0$ ou *ou* $m_x := \mathbb{E}_x(\mathcal{T}_x) < \infty$, então dizemos que x é *recorrente positivo*.

Se x for recorrente, mas não recorrente positivo, então dizemos que é *recorrente nulo*.

Teorema 3

Seja $\mathbf{Q}$ seja uma Q-matriz irredutível. São equivalentes:

(i) Todo estado $x \in \mathcal{S}$ é recorrente positivo;

(ii) Algum estado $x \in \mathcal{S}$ é recorrente positivo;

(iii) $\mathbf{Q}$ é não explosiva e tem uma distribuição invariante λ.

Além disto, quando (iii) valer, temos que $\lambda_x = \dfrac{1}{q_x m_x}$.

Dem. Teo 3

Excluindo o caso trivial em que $\mathcal{S}$ é unitário, a irredutibilidade obriga a que $q_x > 0 \ \forall \ x$.

(i $\Rightarrow$ ii) é óbvio. Para o restante do argumento, vamos fazer as seguintes considerações preliminares. Seja, para $x \in \mathcal{S}$, $\mu^x = (\mu^x_y, \ y \in \mathcal{S})$, onde

$$\mu^x_y = \mathbb{E}_x \int_0^{\mathcal{T}_x \wedge \zeta} \mathbb{1}\{X_s = y\} \, ds.$$

Fubini: $\sum_{y \in \mathcal{S}} \mu^x_y = \mathbb{E}_x(\mathcal{T}_x \wedge \zeta)$.

Seja N_x a primeira passagem de (Y_n), a cadeia de saltos associada a $\mathbf{Q}$, por x. Então,

$$\begin{aligned}
\mu^x_y &= \mathbb{E}_x \sum_{n=0}^{\infty} T_{n+1} \mathbb{1}\{Y_n = y, n < N_x\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x(T_{n+1} | Y_n = y) \mathbb{P}_x(Y_n = y, n < N_x) \\
&= \frac{1}{q_x} \mathbb{E}_x \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Y_n = y, n < N_x\} = \frac{1}{q_x} \mathbb{E}_x \sum_{n=0}^{N_x - 1} \mathbb{1}\{Y_n = y\} = \frac{\gamma^x_y}{q_x},
\end{aligned}$$

usando a notação do caso discreto.

Dem. Teo 3 (cont)

(ii $\Rightarrow$ iii)

(ii) $\Rightarrow x$ é recorrente, logo (Y_n) é recorrente e $\mathbf{Q}$ é não explosiva pelo Teo 2 do Álbum 17 (Teo 2.7.1 do livro).

Sabemos do caso discreto ((2do) Teo 1 do Álbum 6; Teo 1.7.5. do livro) que γ^x é invariante para $\mathbf{\Pi}$; logo $\mu^x\mathbf{Q} = 0$ pelo Teo 1 acima.

Como μ^x é finita:

$$\sum_{y\in\mathcal{S}} \mu_y^x = \mathbb{E}_x(\mathcal{T}_x \wedge \zeta) = \mathbb{E}_x(\mathcal{T}_x) = m_x < \infty,$$

temos que $\lambda_y = \mu_y^x / m_y$, $y \in \mathcal{S}$, é uma distribuição invariante para $\mathbf{Q}$, o que estabelece (iii).

Dem. Teo 3 (cont)

(iii $\Rightarrow$ i)

Supondo agora a validade de (iii), fixemos $x \in \mathcal{S}$ tal que $\lambda_x > 0$, e façamos $\nu_y^x = \frac{\lambda_y q_y}{\lambda_x q_x}$. Então $\nu_x = 1$, e $\nu \mathbf{\Pi} = \nu$, pelo Teo 1.

Logo, pelo (2do) Teo 2 do Álbum 6 (Teo 1.7.6. do livro): $\nu_y^x \geq \gamma_y^x > 0$, $y \in \mathcal{S}$; segue que $\lambda_x > 0$, $x \in \mathcal{S}$, e logo

$$m_x \stackrel{*}{=} \sum_{y \in \mathcal{S}} \mu_y^x = \sum_{y \in \mathcal{S}} \frac{\gamma_y^x}{q_y} \leq \sum_{y \in \mathcal{S}} \frac{\nu_y^x}{q_y} = \sum_{y \in \mathcal{S}} \frac{\lambda_y}{\lambda_x q_x} = \frac{1}{\lambda_x q_x} < \infty,$$

e x é recorrente positiva, $x \in \mathcal{S}$, e temos (i).

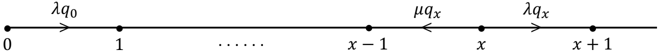
Voltando ao cálculo anterior, sabendo agora que $\mathbf{Q}$ é recorrente, temos que $\mathbf{\Pi}$ é recorrente (Teo 3 do Álbum 19), e do (2do) Teo 2 do Álbum 6 (Teo 1.7.6. do livro), segue que

$$\nu_y = \gamma_y^x, \ y \in \mathcal{S}, \quad \text{e} \quad \lambda_x = \frac{1}{q_x m_x}.$$

$\square$

*Aqui usamos a hipótese de não explosividade.

Contra exemplo



$q_x > 0\ \forall\ x \geq 0$, $\mu = 1 - \lambda \in (0,1)$: irredutibilidade.

Cadeia de saltos: PAS; recorrente positiva $\Leftrightarrow \mu > \lambda$.

Das equações de equilíbrio detalhado†:

$\nu_x = \frac{1}{q_x}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x$ ... medida finita em $\mathbb{N}$ quando p.ex. $1 < \frac{\lambda}{\mu} < 2$ e $q_x = 2^x$.

Note que, nesse último caso, a cadeia de saltos, e logo o PMS, são transitórios. A única explicação é que $\mathbf{Q}$ é explosiva neste caso.

† que fornecem uma mediada invariante nesse caso, como veremos adiante

Teorema 4

Suponha que $\mathbf{Q}$ seja uma Q-matriz irredutível e recorrente em $\mathcal{S}$, e seja λ uma medida em $\mathcal{S}$. São equivalentes:

(i) $\lambda\mathbf{Q} = 0$;

(ii) $\lambda\mathbf{P}(s) = \lambda \ \forall \ s \geq 0$.

Dem. Como $\mathbf{Q}$ é recorrente, então, pelo Teo 2 do Álbum 17 (Teo 2.7.1 do livro), $\mathbf{Q}$ é não explosiva, e $\mathbf{P}(s)$ é recorrente pelo Teo 5 do Álbum 19.

Logo, λ satisfazendo (i) ou (ii) é única a menos de constante multiplicativa. Da prova do Teo 3 acima, temos que, fixado x, se fizermos

$$\mu_y = \mathbb{E}_x\Big(\int_0^{\mathcal{T}_x} \mathbb{1}\{X_t = y\}\, dt \Big), \text{ então } \mu\mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

Basta então mostrar que $\mu\mathbf{P}(s) = \mu$.

Dem. Teo 4 (cont)

Pela Propriedade Forte de Markov:

$$\mathbb{E}_x \int_0^s \mathbb{1}\{X_t = y\}\, dt = \mathbb{E}_x \int_{\mathcal{T}_x}^{\mathcal{T}_x + s} \mathbb{1}\{X_t = y\}\, dt.$$

Logo,

$$\mu_y = \mathbb{E}_x \int_0^{\mathcal{T}_x} \mathbb{1}\{X_t = y\}\, dt = \mathbb{E}_x \int_0^{\mathcal{T}_x + s} \cdots - \mathbb{E}_x \int_{\mathcal{T}_x}^{\mathcal{T}_x + s} \cdots$$

$$= \mathbb{E}_x \int_0^{\mathcal{T}_x + s} \cdots - \mathbb{E}_x \int_0^{s} \cdots = \mathbb{E}_x \int_s^{\mathcal{T}_x + s} \mathbb{1}\{X_t = y\}\, dt$$

$$= \mathbb{E}_x \int_0^{\mathcal{T}_x} \mathbb{1}\{X_{t+s} = y\}\, dt = \mathbb{E}_x \int_0^{\infty} \mathbb{1}\{X_{t+s} = y, t < \mathcal{T}_x\}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} \mathbb{P}_x(X_{t+s} = y, t < \mathcal{T}_x)\, dt \overset{PM}{=} \sum_{z \in \mathcal{S}} \int_0^{\infty} \mathbb{P}_x(X_t = z, t < \mathcal{T}_x) P_{zy}(s)\, dt$$

$$= \sum_{z \in \mathcal{S}} \left(\mathbb{E}_x \int_0^{\mathcal{T}_x} \mathbb{1}\{X_t = z\}\, dt \right) P_{zy}(s) = \sum_{z \in \mathcal{S}} \mu_z P_{zy}(s). \qquad \square$$

Teorema 5

Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz irredutível e não explosiva admitindo uma distribuição invariante λ. Se (X_t) for um PMS$(\lambda, \mathbf{Q})$, então $(X_{t+s})_{t\geq 0}$ também é um PMS$(\lambda, \mathbf{Q})$ para todo $s \geq 0$.

Dem. Pelo Teo 4, para todo $x \in \mathcal{S}$, $\mathbb{P}(X_s = x) = (\lambda \mathbf{P}(s))_x = \lambda_x$.

Pela PM, dado $X_s = x$, $(X_{s+t})_{t\geq 0}$ é um PMS$(\delta_x, \mathbf{Q})$, independente de $(X_r)_{0\leq r\leq s}$. Logo, dados $0 < t_1 < \cdots < t_n$ e $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_{t_n+s} = x_n, \ldots, X_{t_1+s} = x_1) \\
&= \textstyle\sum_{x\in\mathcal{S}} \mathbb{P}(X_s = x)\mathbb{P}(X_{t_n+s} = x_n, \ldots, X_{t_1+s} = x_1 | X_s = x) \\
&= \textstyle\sum_{x\in\mathcal{S}} \lambda_x \mathbb{P}_x(X_{t_n} = x_n, \ldots, X_{t_1} = x_1) \\
&= \mathbb{P}(X_{t_n} = x_n, \ldots, X_{t_1} = x_1).
\end{aligned}$$

$\square$

Convergência ao equilíbrio

Lema 1

Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz e $(\mathbf{P}(t))$ o semigrupo associado (dado pela solução mínima da Equação Atrasada de Kolmogorov).
Então para todo $t, h \geq 0$

$$|P_{xy}(t+h) - P_{xy}(t)| \leq 1 - e^{-q_x h}.$$

Dem.

$$
\begin{aligned}
&|P_{xy}(t+h) - P_{xy}(t)| \\
&= \Big|\sum_{z\in\mathcal{S}} P_{xz}(h)P_{zy}(t) - P_{xy}(t)\Big| \\
&= \Big|\sum_{z\neq x} P_{xz}(h)P_{zy}(t) - (1 - P_{xx}(h))P_{xy}(t)\Big| \\
&\leq 1 - P_{xx}(h) \leq \mathbb{P}_x(T_1 \leq h) = 1 - e^{-q_x h}
\end{aligned}
$$

□

Teorema 6 (Convergência ao equilíbrio)

Seja $\mathbf{Q}$ uma Q-matriz irredutível e não explosiva com semigrupo $(\mathbf{P}(t))$ e distribuição invariante λ. Então para todo $x, y \in \mathcal{S}$

$$P_{xy}(t) \to \lambda_y \text{ quando } t \to \infty.$$

Dem. Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\delta_x, \mathbf{Q})$. Para $h > 0$ fixado, seja $(Z_n)_{n\geq 0} = (X_{nh})_{n\geq 0}$.

Pelo Teo 5 do Álbum 19 (Teo 2.8.4 do livro), temos que $(Z_n) \sim \text{CM}(\delta_x, \mathbf{P}(h))$.

O Teo 1 do Álbum 19 (Teo 3.2.1 do livro) e a irredutibilidade implicam que $P_{xy}(h) > 0 \ \forall \ x, y$.

Logo, $\mathbf{P}(h)$ é irredutível e aperiódica; logo, pelo Teo 4, λ é invariante para $\mathbf{P}(h)$, e pelo Teo de convergência para CM's em tempo discreto:

$$P_{xy}(nh) \to \lambda_y \text{ quando } n \to \infty.$$

Dem. Teo 6 (cont)

Dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $h > 0$ tal que

$$1 - e^{-q_x s} \leq \varepsilon/2 \ \forall\ 0 \leq s \leq h \tag{1}$$

e então escolher N tal que

$$|P_{xy}(nh) - \lambda_y| \leq \varepsilon/2 \ \forall\ n \geq N. \tag{2}$$

Para $t \geq Nh$ e $n \geq N$ tal que $nh \leq t < (n+1)h$, temos

$$|P_{xy}(t) - \lambda_y| \leq |P_{xy}(t) - P_{xy}(nh)| + |P_{xy}(nh) - \lambda_y| \leq \varepsilon,$$

pelo Lema 1, (1) e (2). $\square$

Teorema 7

Consideremos uma Q-matriz $\mathbf{Q}$ irredutível e ν uma distribuição qualquer em $\mathcal{S}$.[‡]

Suponha que $(X_t) \sim \text{PMS}(\nu, \mathbf{Q})$. Então

$$\mathbb{P}(X_t = y) \to \frac{1}{q_y m_y} \text{ quando } t \to \infty \ \forall \ y \in \mathcal{S},$$

onde $m_y = \mathbb{E}_y(\mathcal{T}_y)$.

Dem. Segue do caso discreto, usando o mesmo argumento do Teo 6 (e que $\mathbf{Q}$ recorrente nula $\Rightarrow$ $\mathbf{P}(s)$ recorrente nula; caso transitório é simples).

$\square$

[‡]Para evitar um caso trivial, e diferente, supomos $|\mathcal{S}| \geq 2$.